ՀՏԴ 37.02

Ֆիզիկայի և մաթեմատիկայի դասընթացում չափայնությունների վերլուծության մեթոդի որոշ կիրառությունների մասին*

Վարդան Մանուկյան

DOI: https://doi.org/10.58726/27382923-ne2023.1-94

Հանգուցային բառեր. *խնդիր, անչափողական գործակից, մեծություն, ցուցիչ, կախվածություն*

Նախաբան

Ֆիզիկայի ուսուցման, ինչպես նաև հետազոտություններ կատարելու գործընթացում օգտվում են որոշ մեթոդներից, որոնք արդյունավետ են և հավասարապես կիրառելի ֆիզիկայի գրեթե բոլոր բաժինների համար: Այդ մեթոդներից է չափայնությունների վերլուծության մեթոդը: Սույն մեթոդի ակունքները ընկած են հին հույների հետազոտություններում, սակայն նրա հիմնադիր համարվում է Ֆուրիեն, ով առաջինը մշակեց մեթոդն ու ներկայացրեց որպես հետազոտական լուրջ միջոց: Ավելի ուշ չափայնությունների մեթոդը կիրառվեց և մինչ այժմ էլ լայնորեն կիրառվում է ֆիզիկական տարբեր հետազոտություններում: Ֆիզիկայի ուսուցման գործընթացում նույնպես այս մեթոդի կիրառությունն ունի չափազանց կարևոր դեր: Այն օգնում է առանց մեծ ջանքերի ստանալ ֆիզիկական մեծությունների ֆունկցիոնալ կախվածությունների տեսքեր, նկատել վրիպումները բանաձևերում կամ արագ ստուգել դրանց իսկությունը, անել կարևոր գնահատումներ և այլն:Ելնելով այս կարևորությունից՝ անհրաժեշտություն է առաջանում այս օգտակար մեթոդը պարզ և համակարգված ձևով ներկայացնել ֆիզիկա սովորողներին:

Սույն աշխատանքում նպատակ ունենալով լուսաբանել չափայնությունների վերլուծության մեթոդի դերը ուսուցման ոչ ֆորմալ և արդյունավետ դարձնելուն՝ փորձ է արվում դասակարգել և ներկայացնել դրա արդյունավետ կիրառությունները աստիճանական բարդացման սկզբունքով կազմված խնդիրիների լուծման գործընթացում, ինչն էլ հանդիսանում է աշխատանքի գիտամեթոդական նորույթը: Առանձնակի ուշադրություն է հատկացված մեթոդի կիրառելիության սահմանների հարցերին:

Աշխատանքի առաջին մասում նախ համառոտ ներկայացված է չափայնությունների վերլուծության մեթոդի էությունը, և ապա քննարկված

---

* *Հետազոտությունն իրականացվել է ՀՀ գիտության կոմիտեի ֆինանսական աջակցությամբ՝ 21T-5C039 ծածկագրով գիտական թեմայի շրջանակներում:*

են այն պարզագույն խնդիրները, որոնք կարելի է հեշտությամբ լուծել դրա անմիջական կիրառմամբ: Հաջորդ բաժնում ներկայացված են այն դեպքերը, երբ այս մեթոդով հաստատուն անչափողական արտադրիչի ճշտությամբ միարժեքորեն կարելի է որոշել որոնելի ֆիզիկական արտահայտությունները: Որպես օրինակ լուծված է տատանողական կոնտուրի պարբերության որոշման խնդիրը: Ֆիզիկական խնդիրների շարքն ավարտվում է Կազիմիրի երևույթի վերաբերյալ խնդրի քննարկմամբ, որի լուծման համար չափայնությունների մեթոդի հետ մեկտեղ օգտագործված են լրացուցիչ ֆիզիկական դատողություններ: Աշխատանքի վերջին բաժնում, դիտարկելով մի քանի խնդիրներ և թեստ առաջադրանքներ, վեր են հանված չափայնությունների վերլուծության մեթոդի որոշ հնարավոր արդյունավետ կիրառությունները մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացում:

Չափայնությունների վերլուծության մեթոդի էությունը

Յանկացած ֆիզիկական մեծություն ունի թվային արժեք և չափայնություն: Վերջինս ֆիզիկական առնչությունների օգնությամբ արտահայտվում է հիմնական մեծությունների չափայնություններով: Հիմնական ֆիզիկական մեծությունները տարբեր համակարգերում կարող են ընտրվել տարբեր ձևերով: Ֆիզիկայի դպրոցական դասընթացում ներկայումս կիրառվում է Միավորների միջազգային համակարգը (ՄՄՀ), որի հիմնական մեծություններն են ժամանակը (t), երկարությունը (l), զանգվածը (m), բացարձակ ջերմաստիճանը (T), նյութի քանակը (ν), հոսանքի ուժը (I) և լույսի ուժը (J): Եթե ֆիզիկական բանաձևը ճշմարիտ է, ապա հավասարության աջ և ձախ մասերում գրված մեծությունների չափայնությունները պետք է հավասար լինեն: Նշված մասերի ֆիզիկական մեծությունների չափայնությունները արտահայտելով հիմնական մեծությունների չափայնություններով և կատարելով համեմատություն՝ կարելի է չափայնության բավարարման տեսակետից ստուգել բանաձևը: Իհարկե, դա անհրաժեշտ է, բայց ոչ բավարար, որ բանաձևը լինի ճշգրիտ: Հակառակ նշված գործընթացը կարելի է, ելնելով որոշակի ֆիզիկական նկատառումներից, դիտարկել տվյալ երևույթը նկարագրող ֆիզիկական մեծությունների ֆունկցիոնալ կապը և ապա օգտվելով չափայնության բավարարման պայմանից՝ վերականգնել այն [6; 2, 138]: Անհայտ ֆիզիկական մեծությունը որոշելու այս եղանակն անվանում են չափայնությունների վերլուծության մեթոդ կամ պարզապես չափայնությունների մեթոդ: Ինչ խոսք, նշված մեթոդով ֆիզիկական մեծությունների կախվածությունների վերականգնումը ոչ միշտ է լիարժեք կամ հնարավոր, սակայն մեթոդը շատ կարևոր է և օգտակար ինչպես ֆիզիկան ուսումնասիրողների, այնպես էլ լուրջ ֆիզիկական հետազոտություններ կատարողների համար: Ստորև կներկայացնենք չափայնությունների մեթոդի կիրառությունները ֆիզիկայի և մաթեմատիկայի դասընթացներում տարբեր մակարդակի խնդիրներ քննարկելիս [7, 82-87]:

Չափայնությունների վերլուծության պարզագույն կիրառմամբ լուծվող ֆիզիկական խնդիրներ

Սկզբում դիտարկենք պարզ խնդիրներ, երբ որոնելի մեծությունը ակնհայտորեն կախված է միայն երկու ֆիզիկական մեծություններից, և այդ կախվածությունը չափայնության տեսակետից միարժեք է:

Խնդիր 1: Կատարելով ֆիզիկական մեծությունների չափայնությունների վերլուծություն՝ որոշել R շառավղով շրջանագծով v արագությամբ հավասարաչափ շրջանագծային շարժում կատարող մարմնի կենտրոնաձիգ արագացումը:

Լուծում: Պարզ է, որ բացի արագությունից և շրջանագծի շառավղից, մարմնի կենտրոնաձիգ արագացումը որևէ այլ մեծությունից չի կարող կախված լինել: Շառավղի չափայնությունը l է, իսկ արագությանը՝ $\frac{l}{t}$: Փաստորեն l և $\frac{l}{t}$ չափայնությունների միջոցով անհրաժեշտ է ստանալ արագացման $\frac{l}{t^2}$ չափայնությունը: Վերջինիս համարիչը t^2 է և ակնհայտ է, որ $\frac{l}{t}$ -ը պետք է պարտադիր բարձրացնել քառակուսի՝ $\frac{l^2}{t^2}$: Այժմ հեշտ է նկատել, որ ստացվածը բաժանելով շառավղի l չափայնությանը՝ ստանում ենք որոնելի արագացման չափայնությունը: Այժմ, քանի որ արագացման չափայնությունը հավասար է արագության չափայնության քառակուսու և շառավղի չափայնության հարաբերությանը, համապատասխան ֆիզիկական մեծությունների միջև կարող ենք «վերականգնել» համանման կապը՝ $a_n = \frac{v^2}{R}$: Փաստորեն այս մոտեցմամբ ստացանք հավասարաչափ շրջանագծային շարժում կատարող մարմնի կենտրոնաձիգ արագացման արտահայտությունը:

Խնդիր 2: Որոշել առանց սկզբնական արագության a արագացմամբ շարժվող մարմնի անցած ճանապարհը t ժամանակում:

Լուծում: Նախորդ խնդրի նման այստեղ էլ որոնելի կախվածությունը ինչպես ֆիզիկական, այնպես էլ զուտ չափայնության իմաստով միարժեք է և ելնելով դիտարկվող մեծությունների չափայնություններից ու կատարելով որոշակի մաթեմատիկական վերլուծություն՝ պարզապես անհրաժեշտ է որոշել այն: Ժամանակն ունի t, իսկ արագացումը՝ $\frac{l}{t^2}$ չափայնություն: Պարզ է, որ ճանապարհի l չափայնությունը կարելի է ստանալ հետևյալ կերպ $[s]=l=\frac{l}{t^2}t^2=[a][t]^2$: Եթե անցում կատարենք համապատասխան ֆիզիկական մեծություններին, ապա կստանանք $s=at^2$ բանաձևը, որը անչափողական $\frac{1}{2}$ գործակցով տարբերվում է ճշգրիտ $s=\frac{at^2}{2}$ բանաձևից:

Ինչպես տեսնում ենք, ի տարբերություն նախորդ խնդրի, այս խնդրում չափային վերլուծության մեթոդը հնարավորություն տվեց ստանալու որոնելի ֆունկցիոնալ կախվածությունը միայն հաստատուն արտադրիչի ճշտությամբ: Հարկ է նշել, որ ընդհանուր առմամբ այս մեթոդով ստացված լուծումը ըստ էության միշտ էլ որոշված է հաստատուն անչափողական արտադրիչի ճշտությամբ, և առաջին դեպքը հանդիսանում է ճշգրիտ լուծման հետ պատահական համընկման եզակի դեպքերից մեկը:

Անհրաժեշտ է սովորողների ուշադրությունը հրավիրել այն հանգամանքին, որ եթե անգամ կանխավ հայտնի է որոնելի ֆիզիկական մեծության կախված լինելը միայն տրված երկու մեծություններից, ապա միշտ չէ, որ այդ կախվածությունը կարելի է որոշել չափային վերլուծության եղանակով: Անհրաժեշտ է, որ ֆունկցիոնալ կախվածությունը չափայնության բավարարման տեսակետից լինի միակը: Օրինակ, եթե տրված են երկու մաթեմատիկական ճոճանակների փոքր տատանումների T_1 և T_2 պարբերությունները, և պահանջվում է որոշել դրանց գումարային երկարությունն ունեցող ճոճանակի տատանումների պարբերությունը, ապա վերջինիս կարելի է փնտրել ճիշտ չափայնություն ունեցող տարբեր տեսքերով: Օրինակ, չափայնություն խախտած չենք լինի, եթե որոնելի պարբերությունը փնտրենք $T=aT_1+bT_2$ տեսքով, որտեղ a և b անչափողական գործակիցները կամայական թվեր են: Խնդրի դրվածքի համաչափությունից և սահմանային անցումների բավարարման տեսանկյունից պարզ է դառնում, որ անհրաժեշտ է վերցնել $a=b=1$ դեպքը: Կարծես ամեն ինչ լավ է, և ստացված արտահայտությունը բավարարում է ֆիզիկական պահանջներին: Այն չափողականության տեսակետից ճիշտ է: Բանաձևից հետևում է, որ գումարային երկարությամբ ճոճանակի տատանումների պարբերությունը մեծ է առավել կարճ ճոճանակների պարբերություններից, ինչը ֆիզիկորեն սպասելի է: Երբ որևէ ճոճանակի երկարությունը ձգտեցնում ենք զրոյի, ապա նրա պարբերությունը նույնպես ձգտում է զրոյի, և գումարային երկարությամբ ճոճանակի պարբերությունը դառնում է հավասար երկրորդ ճոճանակի պարբերությանը, որը նույնպես ֆիզիկորեն սպասելի է: Այս ամենով հանդերձ սա սխալ բանաձև է: Մաթեմատիկական ճոճանակի պարբերության բանաձևի կիրառմամբ խնդրի լուծման արդյունքում որոնելի մեծության համար ստացվում է $T=\sqrt{T_1^2+T_2^2}$ արտահայտությունը: Նշենք, որ ճիշտ չափայնություն և սահմանային խելամիտ անցումներ ապահովում են նաև խնդրի լուծում չհանդիսացող $T=\sqrt[n]{T_1^n+T_2^n}, n\neq 2$ դեպքերը:

Անչափողական հաստատունի ճշտությամբ միարժեքորեն որոշվող աստիճանային տեսքի ֆիզիկական կախվածությունների որոշման խնդիրներ

Չափայնությունների մեթոդը առանձնապես արդյունավետ է, երբ ֆիզիկական խնդրում փնտրվող ֆունկցիոնալ կախվածությունը հանդիսանում է բոլոր մեծությունների աստիճանային արտահայտությունների արտադրյալ: Դիցուք, ֆիզիկորեն պարզ է, որ որոնելի X մեծությունը կախված է $A,B,C...$ ֆիզիկական մեծություններից: Այդ դեպքում որոնելի աստիճանային արտահայտությունը կլինի

$$X=k\underbrace{A^{\alpha}B^{\beta}C^{\gamma}...}_{n},$$

որտեղ k-ն չափազուրկ համեմատականության գործակից է: $\alpha,\beta,\gamma,...$ անհայտ ցուցիչներ են, որոնք անհրաժեշտ է որոշել չափային վերլուծության մեթոդով: Այս արտահայտության մեջ ֆիզիկական մեծությունները փոխարինելով իրենց չափայնություններով՝ ստանում ենք հետևյալ արտահայտությունը

$$\underbrace{a^{\Delta}b^{\Gamma}c^{\Sigma}...}_{m}=1,$$

որտեղ $a,b,c,...$-ն կախվածությունում առկա հիմնական չափայնություններն են, իսկ m-ը՝ դրանց քանակը: Քանի որ ցանկացած ֆիզիկական մեծության չափայնությունը հիմնական չափայնությունների աստիճանային արտահայտությունների արտադրյալ է, $\Delta,\Gamma,\Sigma,...$ բնականաբար լինում են $\alpha,\beta,\gamma,...$-ի գծային կոմբինացիաներ: Ճիշտ չափայնություն ապահովելու պահանջը հանգեցնում է m քանակությամբ n անհայտներով գծային հավասարումների լուծման, ինչը միարժեքորեն լուծվում է, եթե հավասարումները գծորեն անկախ են և $m=n$: Հակառակ դեպքում առաջանում է անորոշություն, և չափայնությունների մեթոդը կամ «չի աշխատում», կամ էլ նրա հետ մեկտեղ անհրաժեշտ է օգտվել լրացուցիչ ֆիզիկական գաղափարներից: Դիտարկենք մեկ օրինակ:

Խնդիր 3: Որոշել C ունակությամբ կոնդենսատորից և L ինդուկտիվությամբ կոճից բաղկացած իդեալական տատանողական կոնտուրի տատանումների պարբերությունը:

Լուծում: Իդեալական առանձնացված կոնտուրի համար անտեսում են արտաքին ազդեցությունները, կոճի գալարների, կոնդենսատորի շրջադիրների և կոնդենսատորը կոճին միացնող լարերի օհմական դիմադրությունները, ինչպես նաև կոճի միջգալարային ունակությունը: Այս դեպքում ֆիզիկական համակարգը բնութագրվում է միայն երկու պարամետրերով՝ կոնդենսատորի ունակությամբ և կոճի ինդուկտիվությամբ, որոնցից էլ պետք է կախված լինի կոնտուրի պարբերությունը: Կարելի է ենթադրել, որ կոնտուրում տեղի ունեցող տատանումների պարբերությունը կարող է կախված լինել նաև կոնդենսատորին հաղորդված սկզբնական q_0 լիցքի մեծությունից: Այժմ պարբերությունը ներկայացնենք որպես ֆունկցիա C, L, q_0 մեծություններից հետևյալ տեսքով.

$$T = kC^{\alpha} L^{\beta} q_0^{\gamma},$$

որտեղ k-ն չափազուրկ համեմատականության գործակից է, α, β, γ-ն՝ անհայտ ցուցիչներ: Օգտվելով պարզ ֆիզիկական բանաձևերից՝ հեշտությամբ կարելի է ստանալ քննարկվող ֆիզիկական մեծությունների չափայնությունները.

$$[C] = I^2 t^4 m^{-1} l^{-2},\ [L] = I^{-2} t^{-2} m^1 l^2,\ [q_0] = I^1 t^{-1}:$$

Այժմ պարբերության ֆունկցիոնալ առնչությունում T, C, L, q_0 մեծությունները փոխարինելով իրենց չափայնություններով՝ ստանում ենք.

$$t = I^{2\alpha-2\beta+\gamma} t^{4\alpha-2\beta-\gamma} m^{-\alpha+\beta} l^{-2\alpha+2\beta},$$

որի բավարարման պահանջն էլ բերում է հետևյալ հավասարումների համակարգի լուծմանը.

$$\begin{cases} 1+4\alpha-2\beta-\gamma=0 \\ 2\alpha-2\beta+\gamma=0 \\ -\alpha+\beta=0 \\ -2\alpha+2\beta=0 \end{cases}$$

Ինչպես տեսնում ենք, վերջին երկու հավասարումները գծորեն կախված են, և գործ ունենք երեք անհայտներով երեք անկախ գծային հանրահաշվական հավասարումների համակարգի հետ: Լուծելով համակարգը՝ ցուցիչների համար ստանում ենք հետևյալ արժեքները.

$$\alpha=-\frac{1}{2},\beta=-\frac{1}{2},\gamma=0,$$

որտեղից էլ կոնտուրի պարբերության համար ստանում ենք հետևյալ բանաձևը.

$$T=k\sqrt{LC}:$$

Ինչպես գիտենք, այստեղ էլ համեմատականության գործակիցը մաթեմատիկական ու զսպանակավոր ճոճանակների նման 2π է, և, բնականաբար, չափային վերլուծության գործընթացում այն «կորցնում ենք»:

Հարկ է նշել, որ եթե որոնելի ֆիզիկական կախվածությունը չունի բոլոր մեծությունների աստիճանային արտահայտությունների արտադրյալի տեսք, ապա չափային վերլուծության մեթոդը շատ դեպքերում այլևս ոչնչով չի օգնի գտնելու այն: Օրինակ, եթե կոնտուրի էլեկտրամագնիսական տատանումների պարբերության որոշման հարցը քննարկենք դիմադրության առկայության դեպքում, միայն չափային վերլուծություն կատարելով անհնար է ստանալ $T=\dfrac{2\pi\sqrt{LC}}{\sqrt{1-R^2C/4L}}$ արտահայտությունը: Առավելագույնը, որ կարելի է ստանալ դա նշված արտահայտությունում, ֆիզիկական մեծությունների R^2C/L անչափողական կոմբինացիան է, որը դիմադրության բացակայության դեպքում դառնում է զրո: Պարզ է, որ այդ կոմբինացիան պարբերության բանաձևում պետք է այնպես հանդես գա, որ նրա զրո լինելու դեպքում պարբերությունը հավասար լինի $2\pi\sqrt{LC}$ -ի: Վերջինս, սակայն, կարելի է ապահովել ճիշտ չափայնությամբ տարբեր տեսքերի առնչություններով, որոնց մի մասը կարող է բավարարել նաև որոշակի անհրաժեշտ ֆիզիկական պահանջների: Կարծում ենք, անհրաժեշտ է սովորողներին չափայնությունների վերլուծության մեթոդի կարևորությունը ներկայացնելուց զատ ցույց տալ նաև դրա կիրառելիության որոշակի սահմանափակումները, որպեսզի նրանք իմանան, որ ինչպես ցանկացած այլ մեթոդ, այս մեթոդը ևս համապիտանի չէ:

Չափայնությունների վերլուծության և լրացուցիչ գաղափարների համատեղ կիրառմամբ լուծվող ֆիզիկական խնդիրներ

Կան խնդիրներ, երբ չափայնությունների վերլուծության մեթոդը մասամբ է օգնում դրանց լուծմանը և վերջնական ցանկալի արդյունքին հնարավոր է լինում հասնել՝ օգտվելով լրացուցիչ գաղափարներից: Չափայնությունների վերլուծության մեթոդի ուժեղ կողմերից մեկն էլ այն է, որ հաճախ օգնում է ստանալ որոնելի ֆիզիկական կախվածությունը այն դեպքերում, երբ համապատասխան երևույթները սովորողները որակապես պատկերացնում են, սակայն նրանց գիտելիքների խորությունն ու մաթեմատիկական կարողությունները թույլ չեն տալիս ստանալ այն «ուղիղ» ճանապարհով: Օրինակ, կարելի է ավագ դպրոցի աշակերտներին քվանտային երևույթների ուսումնասիրման ընթացքում ծանոթացնել Կազիմիրի էֆեկտի հետ: Սակայն նույն դասընթացի շրջանակում գործնականում անհնար է անալիտիկ ճանապարհով ստանալ կազիմիրյան ուժերի անգամ ամենապարզ արտահայտություններից մեկը: «Квантовая природа поверхностного натяжения» [3] գիտահանրամատչելի հոդվածում բավականին հետաքրքիր և հնարամիտ ձևով ներկայացված է այդ ուժի համար քանակական առնչության ստացման ուղին, սակայն դա ավելի շատ բանաձևի արտածման նկարագրություն է, քան հենց արտածում և բացի այդ էլ հիմնականում ոչ դպրոցական է: Ցավոք, նշված հաշվարկը կիսատ է, և վերջում էներգիայի խտության համար ստացված արտահայտությանը սխալմամբ վերագրվում է որպես ուժի մակերևութային բաշխման խտություն: Այս վրիպման արդյունքում ուժի համար հոդվածում գրված արտահայտությունը սխալ է: Ստորև կձևակերպենք կազիմիրյան ուժերի պարզագույն խնդիրը և կփորձենք այն լուծել չափայնությունների վերլուծության եղանակի ու լրացուցիչ պարզ ֆիզիկական դատողությունների զուգակցման ճանապարհով:

Խնդիր 4: Որոշել վակուումում գտնվող S մակերեսով երկու զուգահեռ իդեալական մետաղական թիթեղների վրա ազդող կազիմիրյան ուժերի մեծությունը: Թիթեղների միջև հեռավորությունը d է:

Լուծում: Բացի S և d մեծություններից՝ կազիմիրյան ուժերի բանաձևում պետք է առկա լինեն նաև $\hbar$ և c հաստատունները: Բավական է հասկանալ, որ այդ ուժն առաջանում է միջթիթեղային վիրտուալ ֆոտոնների՝ արտաքին տեղամասի ֆոտոնների նկատմամբ նոսրացմամբ և ներքին ու արտաքին տեղամասերում էներգիայի ու իմպուլսի խտությունների տարբերության հաշվին: Ֆոտոնի էներգիայի ու իմպուլսի արտահայտություններում առկա են $\hbar$ և c հիմնարար ֆիզիկական հաստատունները, ուրեմն սպասելի է, որ կազիմիրյան ուժերն արտահայտող բանաձևում նույնպես դրանք առկա լինեն: Այսպիսով թիթեղների վրա ազդող Կազիմիրի ուժերը փնտրելու ենք հետևյալ տեսքով

$$F = k\hbar^{\alpha}c^{\beta}d^{\gamma}S^{\delta},$$

որտեղ k -ն չափազուրկ համեմատականության գործակից է, $\alpha,\beta,\gamma,\delta$-ն՝ անհայտ ցուցիչներ: Կրկին օգտվելով պարզ ֆիզիկական բանաձևերից՝ հեշտությամբ կարելի է որոշել քննարկվող ֆիզիկական մեծությունների չափայնությունները.

$$[F] = mlt^{-2}, [\hbar] = ml^2t^{-1}, [c] = lt^{-1}, [d] = l, [S] = l^2 :$$

Կազիմիրի ուժն արտահատող բանաձևում ֆիզիկական մեծություն-ները փոխարինելով իրենց համապատասխան չափայնություններով՝ ստանում ենք.

$$m^{\alpha-1}l^{2\alpha+\beta+\gamma+2\delta-1}t^{-\alpha-\beta+2} = 1,$$

որի բավարարման պահանջից ստանում ենք հետևյալ հավասարումների համակարգը.

$$\begin{cases} \alpha - 1 = 0 \\ 2\alpha + \beta + \gamma + 2\delta - 1 = 0 \\ -\alpha - \beta + 2 = 0 \end{cases}$$

Ստացվեց չորս անհայտների նկատմամբ երեք հավասարումների համակարգ: Այդ համակարգից α -ն և β-ն հեշտությամբ միարժեքորեն որոշվում են՝

$\alpha = 1, \beta = 1,$

սակայն γ -ի ու δ -ի արժեքները մնում են անորոշ: Այստեղ մեզ օգ-նության է գալիս մի պարզ ֆիզիկական դիտարկում: Դժվար չէ պատկե-րացնել, որ թիթեղների բավականաչափ մեծ լինելու հետևանքով դրանց յուրաքանչյուր մասին հարակից կունենանք միևնույն ֆիզիկական վիճակն ունեցող վակուում: Այլ կերպ ասած՝ գործ ունենք համասեռ մա-կերևութային բաշխման հետ: Այստեղից պարզ է դառնում, որ որոնելի ուժը պետք է ուղիղ համեմատական լինի մակերեսին, հետևաբար $\delta = 1$, իսկ դրանից էլ ստանում ենք $\gamma = -4$: Այսպիսով չափային վերլուծության հետ համատեղ որոշակի ֆիզիկական դատողությունների համադրման արդյունքում հաջողվում է ստանալ կազիմիրյան ուժի հետևյալ բանաձևը.

$$F = k\frac{\hbar c}{d^4}S :$$

Ճշգրիտ հաշվումները, որոնք դուրս են դպրոցական ֆիզիկայի շրջանակից, k գործակցի համար տալիս են $\frac{\pi^2}{240}$ թվային արժեքը [8]: Ինչպես տեսնում ենք, չափային վերլուծության միջոցով կազիմիրյան ուժերի կարգը կամ չի որոշվում, կամ էլ որոշվում է բավականին կոպիտ մոտավորությամբ (եթե կախվածությունը քննարկենք առանց k-ի), սակայն դուրս չգալով դպրոցական ֆիզիկայի իմացությունների շրջանակից՝ հաջողվում է ստանալ այդ ուժի բանաձևը հաստատուն անչափողական արտադրչի ճշտությամբ:

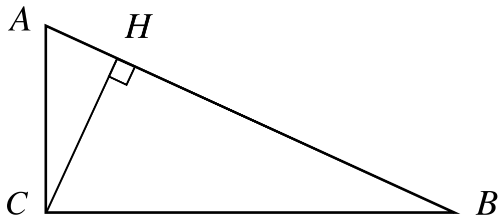
Չափայնությունների վերլուծության մեթոդի որոշ կիրառությունները մաթեմատիկայի դասընթացում

Չափայնությունների վերլուծության մեթոդին ծանոթանալիս կարող է ձևավորվել նախնական թյուր տպավորություն առ այն, որ մեթոդն առավելապես կիրառելի է ֆիզիկայում, և հազիվ թե այն իր հնարավոր արդյունավետ կիրառությունն ունենա մաթեմատիկայում: Մինչդեռ իրականությունն ամենևին այդպիսին չէ: Մասնավորապես, անվանի ֆիզիկոս, ակադեմիկոս Միգդալը ֆիզիկական երևույթների մոտարկմանն ու մոդելավորմանը նվիրված իր հայտնի գիրքը սկսում է չափայնությունների վերլուծության մեթոդով Պյութագորասի թեորեմի արտածմամբ: Ստորև հակիրճ կներկայացնենք այդ ապացույցը, որից հետո, որպես առաջարկվող մոտեցման զարգացում, չափայնությունների վերլուծության մեթոդի կիրառմամբ, կապացուցենք տարբեր երկրաչափական պնդումներ:

Խնդիր 5: Ապացուցել, որ կամայական ուղղանկյուն եռանկյան ներքնաձիգի քառակուսին հավասար է էջերի քառակուսիների գումարին [4, 9-10]:

Լուծում: Ի նկատի ունենալով չափայնությունների վերլուծության մեթոդը՝ կարող ենք պնդել, որ c ներքնաձիգով ABC կամայական ուղղանկյուն եռանկյան $\left(\angle C = 90^0\right)$ մակերեսը կարելի է ներկայացնել որպես ֆունկցիա ներքնաձիգից և վերջինիս առընթեր սուր անկյունից հետևյալ տեսքով՝ $S_{ABC} = c^2 \cdot f\left(\angle A\right) = c^2 \cdot f\left(\angle B\right)$ (տես նկ. 1): Դիցուք $\angle A = \alpha$; $\angle B = \beta$ և $CH \perp AB$: Հեշտ է նկատել, որ $\angle BCH = \alpha$ և $\angle ACH = \beta$, հետևաբար, համաձայն վերոգրյալի, ABC եռանկյան մակերեսի համար կունենանք՝

$$S_{ABC} = S_{ACH} + S_{BCH} \Leftrightarrow AB^2 \cdot f(\alpha) =$$
$$= AC^2 \cdot f(\alpha) + BC^2 \cdot f(\alpha) \Leftrightarrow AB^2 = AC^2 + BC^2,$$ ինչն էլ պահանջվում էր ապացուցել [6, 9-10]:



Նկար 1. C ուղիղ անկյունով ABC ուղղանկյուն եռանկյուն, որի ներքնաձիգին տարված է CH բարձրությունը

Այժմ համանման մոտեցմամբ ապացուցենք երկրաչափության դպրոցական դասընթացից հայտնի երկու պնդումներ։

Խնդիր 6: Ապացուցել, որ կամայական ուղղանկյուն եռանկյան ներքնաձիգին տարված բարձրության քառակուսին հավասար է ներքնաձիգի վրա առաջացած հատվածների արտադրյալին [1, 57]։

Լուծում: Ի նկատի ունենալով չափայնությունների վերլուծության մեթոդը և խնդիր 5-ում կիրառված մոտեցումը՝ կարող ենք պնդել, որ $\angle C = 90^0$ ուղիղ անկյունով ABC կամայական ուղղանկյուն եռանկյան մակերեսը կարելի է ներկայացնել որպես ֆունկցիա էջից և վերջինիս առընթեր սուր անկյունից հետևյալ տեսքով՝

$S_{ABC} = AC^2 \cdot g\left(\angle A\right) = BC^2 \cdot g\left(\angle B\right)$ (տես նկ. 1)։

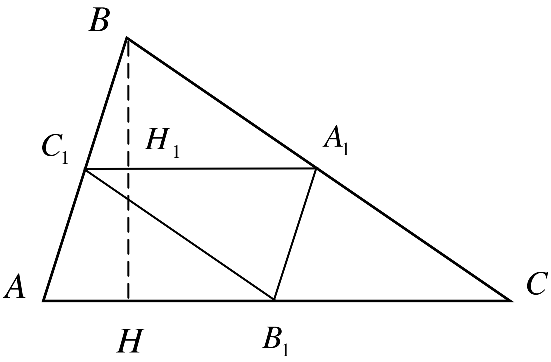
Դիցուք $\angle C = 90^0$; $\angle A = \alpha$; $\angle B = \beta$ և $CH \perp AB$: Հեշտ է նկատել, որ $\angle BCH = \alpha$ և $\angle ACH = \beta$, հետևաբար, համաձայն վերոգրյալի, ACH և BCH եռանկյունների մակերեսների համար կունենանք.

$$\left.\begin{array}{l} S_{ACH} = CH^2 \cdot g\left(\beta\right) = AH^2 \cdot g\left(\alpha\right) \\ S_{BCH} = CH^2 \cdot g\left(\alpha\right) = BH^2 \cdot g\left(\beta\right) \end{array}\right. \Rightarrow CH^4 = AH^2 \cdot BH^2 \Rightarrow CH^2 = AH \cdot BH,$$

ինչն էլ պահանջվում էր ապացուցել։

Խնդիր 7: Ապացուցել, որ կամայական եռանկյուն իր միջին գծերով բաժանվում է չորս հավասարամեծ եռանկյունների [5, 73]։

Լուծում: Դիտարկենք A_1B_1; B_1C_1 և C_1A_1 միջին գծերով կամայական ABC եռանկյուն, որում տարված է BH բարձրությունը (տե՛ս նկար 2)։



Նկար 2. A_1B_1; B_1C_1 ***և*** C_1A_1 ***միջին գծերով*** ABC ***եռանկյուն, որում տարված է*** BH ***բարձրությունը***

Հեշտ է նկատել, որ համաձայն Թալեսի թեորեմի, $BH_1 = \frac{BH}{2}$: Դիցուք $\angle ABH = \alpha$ և $\angle CBH = \beta$: Ի նկատի ունենալով չափայնությունների վերլուծության մեթոդը և խնդիր 6-ում կիրառված մոտեցումը՝ A_1C_1B և ABC եռանկյունների մակերեսների համար կունենանք՝

$$S_{A_1C_1B} =$$
$$= S_{A_1H_1B} + S_{C_1H_1B} = BH_1^2\left(g\left(\beta\right) + g\left(\alpha\right)\right) =$$
$$= \frac{BH^2}{4}\left(g\left(\beta\right) + g\left(\alpha\right)\right) = \frac{S_{CHB} + S_{AHB}}{4} = \frac{S_{ABC}}{4}:$$

Համանման ձևով կապացուցենք, որ

$$S_{A_1B_1C} = S_{B_1C_1A} = S_{A_1C_1B} = \frac{S_{ABC}}{4} \Rightarrow S_{A_1B_1C_1} =$$
$$= S_{ABC} - \left(S_{A_1B_1C} = S_{B_1C_1A} = S_{A_1C_1B}\right) = \frac{S_{ABC}}{4}:$$

Խնդրի պնդումն ապացուցված է:

Ինչպես տեսնում ենք, չափայնությունների վերլուծության մեթոդը առանձին դեպքերում կարող է բավական արդյունավետ «գործիք» հանդիսանալ երկրաչափական տարբեր պնդումներ ապացուցելիս:

Ի հավելում վերոգրյալի նշենք, որ չափայնությունների վերլուծության մեթոդն իր հնարավոր արդյունավետ կիրառությունները կարող է ունենալ նաև տարատեսակ մաթեմատիկական թեստային առաջադրանքների լուծման ժամանակ, երբ թեստի միջոցով նպատակ է դրվում ստուգելու աշակերտի գիտելիքը երկրաչափական այս կամ պատկերի (մարմնի) մակերեսի (ծավալի) հաշվման բանաձևի իմացության վերաբերյալ:

Որպես ասվածի հիմնավորում՝ դիտարկենք երկու թեստային առաջադրանքներ:

Թեստ 1: Որ բանաձևով է որոշվում a; b; c կողմերով (p կիսապարագծով, արտագծած շրջանագծի R շառավղով, ներգծած շրջանագծի r շառավղով) եռանկյան մակերեսը.

ա) $S=\dfrac{abc}{4R^2}$, բ) $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$,

գ) $S=pr^2$, դ) $S=\sqrt{abc}$:

Լուծում: Հեշտ է նկատել, որ բերված տարբերակներից ա-ում, գ-ում և դ-ում S-ը չունի երկարության քառակուսու չափողականություն, հետևաբար, համաձայն չափայնությունների վերլուծության մեթոդի, այս տարբերակներն ակնհայտորեն սխալ են, և ըստ այդմ, բացառելով սխալ տարբերակները, հանգում ենք միակ ճշմարիտ տարբերակին՝ $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (տարբերակ-բ):

Թեստ 2: Որ բանաձևով է որոշվում a; b; c կողերով ուղիղ պրիզմայի ծավալը.

ա) $V=a^2b^2c^2$, բ) $V=a^2+b^2+c^2$,

գ) $V=abc$, դ) $V=\sqrt{a^3+b^3+c^3}$:

Լուծում: Հեշտ է նկատել, որ բերված տարբերակներից ա-ում, բ-ում և դ-ում V-ն չունի երկարության խորանարդի չափողականություն, հետևաբար, համաձայն չափայնությունների վերլուծության մեթոդի, այս տարբերակներն ակնհայտորեն սխալ են, և ըստ այդմ, բացառելով սխալ տարբերակները, հանգում ենք միակ ճշմարիտ տարբերակին՝ $V=abc$ (տարբերակ-գ):

Եզրակացություն

Չափայնությունների վերլուծության մեթոդի դասավանդման սույն հոդվածում ներկայացված մոտեցումը, ըստ բարդության աստիճանի խնդիրների դասակարգումը, համապատասխան օրինակներն ու մեթոդական բնույթի ցուցումները կարող են օգտակար լինել սովորողներին՝ այդ մեթոդի ազատ և հմուտ կիրառման հարցում, զարգացնելով վերլուծական և տրամաբանական մտածողություն նմանատիպ մոտեցումները՝ բարձրացնում են առարկայի տիրապետման որակն ու նպաստում ֆիզիկայի նկատմամբ հետաքրքրության աճին:

DOI: https://doi.org/10.58726/27382923-ne2023.1-94

Գրականություն

1. Աթանասյան Լ. Ս., Բուտուզով Վ. Ֆ., Կադոմցև Ս. Բ. և ուր., Երկրաչափություն-9: Դասագիրք հանրակրթ. դպր. 9-րդ դաս. համար, Երևան, «Զանգակ-97», 2008, 144 էջ:
2. Ալավերդյան Ռ. Բ., Մելիքյան Գ. Գ., Նինոյան Ժ. Հ., Պետրոսյան Ա. Վ., Ֆիզիկայի խնդիրների ժողովածու, Երևան, հեղինակային հրատարակություն, 2009, 272 էջ:
3. Кречетников Р., Зельников А. Квантовая природа поверхностного натяжения. «Квант» 2022, N 3, с. 7-12.
4. Мигдал А.Б. Качественные методы квантовой теории. М.: «Наука», 1975, - 395 с.
5. Рыбкин Н. Сборник задач по геометрии. М.: Гос. Учебно-педагогическое издательство, 1935, - 112 с.
6. Сена Л.А. Единицы физических величин и их размерности. М.: «Наука», 2000, - 309 с.
7. Тирский Г.А. Анализ размерностей. Соросовский образовательный журнал, том 7, 2004, с. 82-87.
8. https://en.wikipedia.org/wiki/Casimir_effect

О некоторых применениях метода размерного анализа в курсе физики и математики

Вардан Манукян

Резюме

Ключевые слова: *задача, безразмерный коэффициент, величина, показатель степени, зависимость*

В данной работе, с целью выделения роли метода анализа размерности в обеспечении неформальности и эффективности обучения, предпринята попытка классифицировать и представить его эффективные применения в процессе решения задач на основе принципа постепенной сложности, в чем и заключается научно-методическая новизна работы. Особое внимание уделено вопросам границ применимости метода.

В первой части работы кратко изложена суть метода анализа размерности, а затем рассмотрены простейшие задачи, которые легко решаются его непосредственным применением. В следующем разделе представлены случаи, когда искомые физические выражения, определяемые этим методом, могут быть определены однозначно с точностью постоянного безразмерного множителя. В качестве примера решается задача определения периода колебательного контура. Цикл физических задач завершается обсуждением задачи о явления Казимира, для решения которой наряду с методом размерностей используются дополнительные физические рассуждения.

При ознакомлении с методом анализа размерностей может сложиться первоначальное ошибочное впечатление, что метод наиболее применим в физике, и вряд ли имеет возможное эффективное применение в математике. Однако, это совсем не так. Не зря известный физик, академик Мигдал начинал свою знаменитую книгу, посвященную аппроксимации и моделированию физических явлений, доказательством теоремы Пифагора с использованием метода анализа размерностей. В последнем разделе работы, рассмотрены некоторые задачи, и тестовые задания математики, при решении которых применяется метод анализа размерности.

On Some Applications of the Method of Dimensional Analysis in the Course of Physics and Mathematics

Vardan Manukyan

Summary

Key words: *problem, non-dimensional coefficient, quantity, exponent, dependence*

In the article, it was attempted to classify and represent the effective applications of the dimensional analysis method in the process of solving problems based on the principle of gradual complexity, which is the scientific and methodological novelty of the work, in order to highlight the role of the method in ensuring the informality and effectiveness of training. Particular attention is paid to the issues of the limits of the method's applicability.

In the first part of the work, the essence of the dimensional analysis method is briefly outlined, and then the simplest problems easily solved by its direct application are considered. The next section represents the cases when the desired physical expressions determined by this method can be uniquely determined with the accuracy of a constant dimensionless factor. As an example, the problem of determining the period of an oscillatory circuit is solved. The cycle of physical problems ends with a discussion of the problem of the Casimir phenomenon, for the solution of which, along with the method of dimensions, additional physical reasoning is used.

When getting acquainted with the method of dimensional analysis, an initial erroneous impression may arise that the method is most applicable in physics, and is unlikely to have a possible effective application in mathematics. However, this is not true. No wonder the famous physicist, academician Migdal began his famous book on approximation and modeling of physical phenomena by proving the Pythagorean theorem using the dimensional analysis method. In the last section of the work, some tasks and test tasks of mathematics are considered, in the solution of which the dimensional analysis method is used.

Ներկայացվել է 10.04.2023 թ.
Գրախոսվել է 04.05.2023 թ.
Ընդունվել է տպագրության 25.05.2023 թ.